

EXAMEN 2001.MOD 5 OP A

1.- Sea $f: R \rightarrow R$ la función definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ 1 - mx - x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

a) [1,25 pts] Determina m sabiendo que f es derivable.

En sus respectivos intervalos de definición, ambas ramas son continuas y derivables. La primera rama tendría un punto de discontinuidad en $x=1$, donde se anula el denominador, pero no afecta a su intervalo de definición.

Así, para calcular m siendo derivable, primero comprobamos la continuidad de f en $x=0$.

$$f(0) = 1 - m \cdot 0 - 0^2 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-0} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - mx - x^2) = 1 - m \cdot 0 - 0^2 = 1$$

$f(x)$ es continua en $x=0$.

$$\text{Calculamos } f'(x): f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{(1-x)^2} & \text{si } x < 0 \\ -m - 2x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x=0$, las derivadas laterales deben coincidir:

$$\left. \begin{aligned} f'(0^-) &= \frac{1}{(1-0)^2} = 1 \\ f'(0^+) &= -m - 2 \cdot 0 = -m \end{aligned} \right\} \Rightarrow 1 = -m; \quad \mathbf{m = -1}$$

EXAMEN 2001.MOD 6 OP A

1.- Considera la función $f: (-\infty, 10) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a^x - 6 & \text{si } x < 2 \\ |x - 5| & \text{si } 2 \leq x < 10 \end{cases}$$

a) [1 pto] Determina el valor de a sabiendo que f es continua (y que $a > 0$).

b) [0,5 Ptos] Esboza la gráfica de f

a) Las funciones exponencial y valor absoluto de un polinomio son continuas en su dominio. Solo puede haber discontinuidad en $x=2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = |2 - 5| = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (a^x - 6) = a^2 - 6 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} |x - 5| = |2 - 5| = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow 3 = a^2 - 6 = 3;$$

$$a^2 - 6 = 3; \quad a^2 = 9; \quad a = \pm 3$$

Como el enunciado indica que $a > 0$ y también las funciones exponenciales solo están definidas cuando la base sea positiva: **$a=3$** .

b) Esbozar la gráfica de f .

La Primera rama de la curva $3^x - 6$ es una función exponencial desplazada 6 unidades hacia abajo. Tiene una rama asintótica horizontal en $y=-6$ cuando x tiende a $-\infty$. La 2ª rama es una recta –paralela a la bisectriz del primer cuadrante- afectada por un valor absoluto. Tras los cálculos del apartado anterior, hacemos una sencilla tabla de valores para esbozar la gráfica:

x	$3^x - 6$	$ x - 5 $
$\rightarrow -\infty$	$\rightarrow -6$	
0	$1-6=-5$	
1	$3-6=-3$	
$\rightarrow 2$	$3^2-6=\rightarrow 3$	
2		3
3		2
5		0
6		1
9		4
$\rightarrow 10$		$\rightarrow 5$

